PRÉPARATION À L'AGRÉGATION EXTERNE : COLORIAGE D'UNE ROUE

TONY LIMAGNE

Ce développement est traité de manière sommaire dans [D, Chap. 3, §3.1, Exercice 3.1.18]. Il est adapté pour les leçons 101, 105, 104 et 190.

1. Développement

Théorème 1. Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. Le nombre de roues divisées régulièrement en n secteurs angulaires coloriés avec au plus p couleurs est égal, à rotation près, à

$$\frac{1}{n}\sum_{d|n} \phi\left(\frac{n}{d}\right) p^d,$$

où ϕ est l'indicatrice d'Euler.

Démonstration. Fixons R une roue divisée régulièrement en n secteurs angulaires et coloriée avec un panel de p couleurs disponibles. On note X l'ensemble des secteurs angulaires de R et Y l'ensemble des couleurs disponibles. Quitte à numéroter les secteurs angulaires et les couleurs, on peut poser $X = [\![1, n]\!]$ et $Y = [\![1, p]\!]$.

Nommons *coloriage* de R toute application de X dans Y et disons que deux coloriages f_1 et f_2 sont *identiques* lorsqu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $f_2 = f_1 \circ \sigma^k$ où $\sigma = (1, \ldots, n)$. Deux coloriages identiques se déduisent l'un de l'autre par rotation de R, comme le montre la figure suivante :

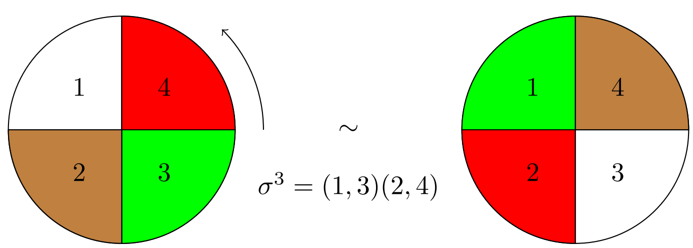

Figure 1. Deux coloriage identiques d'une roue (ici $n = 4$ et $p = 3$) qui se déduisent l'un de l'autre par une rotation d'angle $\frac{3\pi}{2}$.

La relation binaire

$$f_1 \sim f_2 \quad \Leftrightarrow \quad f_1 \text{ et } f_2 \text{ sont identiques},$$

est une relation d'équivalence. On note $\mathscr{F}(X, Y)$ l'ensemble des coloriages. On cherche le cardinal N de l'ensemble quotient $\mathscr{F}(X, Y)/\sim$. La relation $\sim$ est induite par l'action du groupe $G = \langle\sigma\rangle$ sur $\mathscr{F}(X, Y)$ pour l'action définie par

$$\sigma.f = f \circ \sigma.$$

Date: Année 2025.

La formule de Burnside pour cette action donne directement

$$N = \frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} \# \operatorname{Fix}(s),$$

où on a posé $\operatorname{Fix}(s) = \{f \in \mathscr{F}(X,Y) : f \circ s = f\}$. Fixons $s \in G$ et notons $H = \langle s \rangle$. Lorsque $f \in \operatorname{Fix}(s)$ on observe que

$$f \circ s^2 = (f \circ s) \circ s = f \circ s = f,$$

et donc par une récurrence (quasi) immédiate : $f \circ s^k = f$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. L'ensemble

$$\mathscr{F}(X,Y)^H = \{f \in \mathscr{F}(X,Y) : \forall h \in H, f \circ h = f\},$$

est donc égal à $\operatorname{Fix}(s)$. On peut alors réécrire

$$N = \frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} \# \mathscr{F}(X,Y)^H.$$

On considère maintenant deux actions sur H. L'une est l'action de H sur $\mathscr{F}(X,Y)$ par restriction (de G sur $\mathscr{F}(X,Y)$). La seconde est l'action naturelle de H sur X définie par $s.x = s(x)$. En considérant conjointement ces deux actions on a une bijection, à savoir

$$\mathscr{F}(X,Y)^H \sim \mathscr{F}(X/H,Y).$$

En effet, en notant $\pi : X \to X/H, x \mapsto \operatorname{Orb}(x) = \{s^k(x)\}_{k \in \mathbb{N}}$ la surjection canonique l'application

$$\Phi : \mathscr{F}(X/H,Y) \to \mathscr{F}(X,Y)^H, \xi \mapsto \xi \circ \pi,$$

est bien définie (par définition de π) et clairement injective. Si $f \in \mathscr{F}(X,Y)^H$ on a $f(s^k(x)) = f(x)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $x \in X$. La correspondance $X/H \to Y, \{s^k(x)\}_{k \in \mathbb{N}} \mapsto f(x)$ est donc une application, c'est-à-dire un élément de $\mathscr{F}(X/H,Y)$: l'application Φ est surjective. En résumé Φ est une bijection entre ensembles finis et on a

$$\# \mathscr{F}(X,Y)^H = \# \mathscr{F}(X/H,Y) = \# Y^{\# X/H}.$$

Soient $i \in [\![1,n]\!]$ tel que $s = \sigma^i$ et r l'ordre de s dans G. On sait que $r = \frac{n}{\operatorname{pgcd}(n,i)}$. Toujours par le théorème de Burnside (pour l'action naturelle de H sur X) on a

$$\# X/H = \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{r-1} \# \operatorname{Fix}(\sigma^{il}).$$

Soit $k \in [\![0,n-1]\!]$. Dire que $x \in [\![1,n]\!]$ est un point fixe de σ^k signifie que $\sigma^k(x) = x$. Comme $\sigma = (1,2,\dots,n)$ est un cycle d'ordre n alors $\sigma^k(x) = x + k \mod n$ si bien que x est point fixe de σ^k si et seulement si n divise k. Et puisque $0 \leqslant k \leqslant n-1$ alors $k = 0$ de sorte que $\operatorname{Fix}(\sigma^k) \neq \emptyset$ si et seulement si $k = 0$, et dans ce cas $\operatorname{Fix}(\mathrm{id}) = [\![1,n]\!]$. Ainsi on a $\# X/H = \frac{n}{r} = \operatorname{pgcd}(n,i)$ et donc

$$N = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} p^{\operatorname{pgcd}(n,i)}.$$

On observe ensuite que pour $d \in \mathbb{N}^*$ fixé on a

$$\begin{aligned} \{i \in [\![1,n-1]\!] : \operatorname{pgcd}(n,i) = d\} &= \{i \in [\![1,n-1]\!] : d|n \text{ et } \operatorname{pgcd}(n/d, i/d) = 1\}, \\ &= \{i \in [\![1, \lfloor n/d \rfloor - 1]\!] : d|n \text{ et } \operatorname{pgcd}(n/d, i) = 1\}. \end{aligned}$$

Finalement on a $N = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \phi\left(\frac{n}{d}\right) p^d$, ce qui conclut. $\square$

2. Quelques questions bêtes auxquelles il faut absolument répondre rapidement

(1) Énoncé et démontrer la formule de Burnside.
(2)
(3)

Références

[D] J. Delcourt, *Théorie des groupes*, Dunod, 2001.